Problemi tratti dai Giochi di Archimede

Emanuele Biolcati

edizioni 2011-2013-2015

---

1 Logica

13) Dopo una rissa in campo l'arbitro vuole espellere il capitano di una squadra di calcio. È uno tra Paolo, Andrea e Gabriele ma, siccome nessuno ha la fascia al braccio, non sa qual è dei tre. Paolo dice di non essere il capitano; Andrea dice che il capitano è Gabriele; Gabriele dice che il capitano è uno degli altri due. Sapendo che uno solo dei tre dice la verità, quale delle affermazioni seguenti è sicuramente vera?
(A) Gabriele non è il capitano, **(B)** Andrea dice la verità, **(C)** Paolo dice la verità, **(D)** Andrea è il capitano, **(E)** Gabriele mente.

15) Ciascuno dei quattro amici Anna, Erica, Lorenzo e Giuseppe, mente sempre o dice sempre la verità. Anna dice: "Erica mente sempre"; Erica dice: "Giuseppe dice sempre il vero"; Giuseppe dice: "Anna mente sempre"; infine Lorenzo dice: "Anna, Erica e Giuseppe mentono sempre". Quanti sono, al massimo, quelli che mentono sempre?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** nessuna delle precedenti.

2) In una conversazione tra due matematici il primo dice al secondo: "Ieri ho mentito". L'altro risponde: "Anch'io ieri ho mentito". Sapendo che uno dei due mente il lunedì, il martedì e il mercoledì (e solo in questi giorni), mentre l'altro mente il giovedì, il venerdì e il sabato (e solo in questi giorni), in quale giorno della settimana è avvenuta la conversazione?
(A) lunedì **(B)** giovedì **(C)** domenica **(D)** una tale conversazione non può essere avvenuta **(E)** non è possibile determinare il giorno in modo univoco.

12. Sull'isola dei cavalieri e dei furfanti, i cavalieri sono sempre sinceri ed i furfanti mentono sempre. Durante una riunione, i presenti si siedono attorno a un grande tavolo e ciascuno dice: "la persona alla mia destra è un furfante". Sapendo che tra i presenti ci sono meno di 100 cavalieri, quale dei seguenti potrebbe essere il numero dei partecipanti alla riunione?
(A) 208 **(B)** 85 **(C)** 153 **(D)** 168 **(E)** 205

---

2 Teoria dei Numeri

21) In un torneo ci sono 20 partecipanti. Ad ogni turno vengono estratti due tra i partecipanti ancora in gara, e questi disputano una partita. Ogni partecipante che sia stato sconfitto due volte viene eliminato e l'ultimo concorrente che resta vince. Sapendo che il vincitore non ha mai perso, quante partite si sono disputate in tutto?
(A) 19, **(B)** 38, **(C)** 40, **(D)** 380, **(E)** non ci sono dati sufficienti.

19) In una sequenza di 2011 numeri, il primo è 1 e il secondo è 0; ogni altro termine, è uguale alla differenza dei due termini precedenti: il terzo termine è il secondo meno il primo, il quarto è il terzo meno il secondo, e così via. Quanto vale l'ultimo termine della sequenza?
(A) -2010, **(B)** -1, **(C)** 0, **(D)** 1, **(E)** 2011.

11) Gabriella scrive una successione di 10 numeri (eventualmente negativi), in modo che ciascun numero della successione, dal terzo in poi, sia la somma dei due che lo precedono. Il primo numero della successione è 34 mentre l'ultimo è 0. Quanto vale la somma di tutti i numeri della successione?
(A) -34, **(B)** 0, **(C)** 22, **(D)** 68, **(E)** 88.

7) Un numero si dice palindromo se la sequenza delle sue cifre non cambia che la si legga da sinistra a destra o da destra a sinistra; ad esempio 36563 è palindromo. Quanti sono i numeri palindromi di 5 cifre tali che la somma delle loro cifre sia pari?
(A) 450, **(B)** 550, **(C)** 700, **(D)** 900, **(E)** 1000.

13) Se n è un numero naturale con 6 divisori interi positivi, quanti divisori interi positivi ha n^2? N.B.: tra i divisori di un numero contiamo anche 1 ed il numero stesso.
(A) 11 **(B)** 12 **(C)** 15 **(D)** 36 **(E)** la risposta dipende da n

1) Quanti sono i numeri di 6 cifre, formati dalle cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, divisibili per 1, 2, 3, 4, 5, 6?
(A) Nessuno, **(B)** 1, **(C)** 18, **(D)** 120, **(E)** 360.

4. Qual è la cifra delle unità di $3^{(8^7)}$?
(A) 1 **(B)** 7 **(C)** 3 **(D)** 9 **(E)** 5

8. Qual è la 2015^a cifra dopo la virgola della scrittura decimale di $3/7$?
(A) 7 **(B)** 1 **(C)** 5 **(D)** 2 **(E)** 4

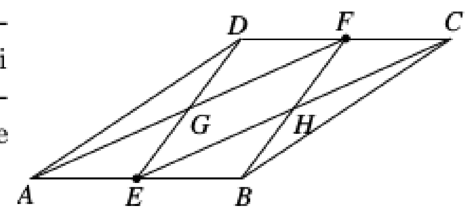
17) Come si ordinano in ordine crescente di grandezza i tre numeri 3^{33}, 4^{30}, 5^{25} ?
(A) $3^{33} < 4^{30} < 5^{25}$ **(B)** $3^{33} < 5^{25} < 4^{30}$ **(C)** $4^{30} < 3^{33} < 5^{25}$
(D) $4^{30} < 5^{25} < 3^{33}$ **(E)** $5^{25} < 4^{30} < 3^{33}$

3 Geometria

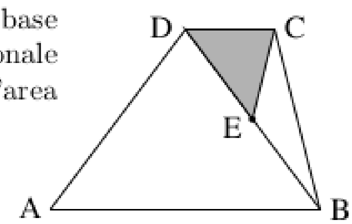
16) ABC è un triangolo isoscele, con $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ cm. D ed E sono due punti su AB e AC rispettivamente, entrambi distanti 6 cm da A, e H è il piede dell'altezza di ABC relativa a BC. Calcolare il rapporto tra le aree di ABC e di DHE.
(A) $\frac{25}{9}$, **(B)** $\frac{25}{12}$, **(C)** $\frac{10}{6}$, **(D)** $\frac{25}{6}$, **(E)** $\frac{9}{4}$.

22) Su un foglio è disegnato il quadrato $ABCD$. Il foglio viene piegato (lungo una linea retta) in modo che B vada a coincidere con il punto medio di DC. Il lato BC viene diviso dalla piegatura in due segmenti di lunghezze a e b, con $a \leq b$. Quanto vale b/a?
(A) 2, **(B)** 1, **(C)** 5/3, **(D)** 25/9, **(E)** $\sqrt{5}/2$.

6) Nel parallelogramma $ABCD$ in figura il segmento BD è perpendicolare ad AB ed E e F sono i punti medi di AB e CD rispettivamente. Calcolare l'area del quadrilatero $GEHF$, sapendo che $AB = 5$ cm e $BD = 2$ cm.
(A) $\dfrac{15}{8}\,\text{cm}^2$, **(B)** $2\,\text{cm}^2$, **(C)** $\dfrac{9}{4}\,\text{cm}^2$,
(D) $\dfrac{5}{2}\,\text{cm}^2$, **(E)** $3\,\text{cm}^2$.



10) In un trapezio $ABCD$ la base maggiore AB è tripla della base minore CD. Indicato con E il punto medio della diagonale BD, qual è il rapporto fra l'area del triangolo CDE e l'area del trapezio?
(A) 1/3 **(B)** 1/6 **(C)** 1/8 **(D)** 1/12
(E) non può essere determinata dai dati forniti



7) Quanto è lungo il percorso più corto che passa per tutti i vertici di un cubo di lato 1 m? N.B. il percorso può anche passare all'interno del cubo.
(A) 6 m **(B)** 7 m **(C)** $(6 + \sqrt{2})$ m **(D)** $(6 + \sqrt{3})$ m **(E)** 8 m

---

4 Algebra

6. Ad una festa, ogni ragazzo ha danzato con 4 ragazze diverse ed ogni ragazza ha danzato con 3 ragazzi diversi. Sapendo che alla festa c'erano 9 ragazzi, quante erano le ragazze?
(A) 6 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 8 **(E)** 16

14) Sapendo che a e b sono due numeri reali positivi tali che $a^2(a - 3b) = b^2(b - 3a)$, quanti valori diversi può assumere il rapporto $\dfrac{a}{b}$?
(A) 0, **(B)** 1, **(C)** 3, **(D)** 5, **(E)** infiniti.

11) Sapendo che k è un numero intero positivo fissato, per quante coppie (x, y) di numeri reali maggiori o uguali a 0 vale l'uguaglianza $x^{2k} + y^{2k} = (xy)^k$?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** infinite **(E)** dipende da k

6) Ad un convegno partecipano 30 scienziati ciascuno dei quali è un matematico, o un fisico, o un chimico o un biologo. I fisici e i biologi, insieme, sono la metà dei matematici; i fisici e i chimici, insieme, sono il doppio dei biologi. Inoltre, di fisici ce n'è almeno uno. Quanti sono i matematici?
(A) 6 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 15 **(E)** 18

15) Qual è il coefficiente di x^{199} in $(x^2 + x + 1)^{100}$?
(A) 100 **(B)** 298 **(C)** 4950 **(D)** 5050 **(E)** 99^2

14) Il polinomio $p(x)$ ha grado maggiore o uguale a 2 ed i suoi coefficienti sono tutti numeri interi. Quale dei seguenti numeri divide certamente $p(169) - p(1)$?
(A) 25 **(B)** 32 **(C)** 36 **(D)** 49 **(E)** 56

5) Alla Grande Cena delle Olimpiadi, che si tiene ogni anno durante la manifestazione di Cesenatico, ci sono vari primi e vari secondi piatti. L'anno scorso c'erano 60 modi di scegliere un pasto (ovvero un primo e un secondo). Quest'anno verranno aggiunti dei primi, e ci saranno 68 modi di scegliere un pasto. Quanti primi c'erano, come minimo, lo scorso anno? [Nello scegliere un pasto è possibile abbinare qualsiasi primo a qualsiasi secondo.]
(A) 4, **(B)** 8, **(C)** 10, **(D)** 12, **(E)** 15.

---

5 Combinatoria

20. Sette amici stanno cenando tutti attorno a un tavolo. Qualcuno deve andare a preparare il dolce. Nella comitiva vale la regola che nessuna coppia di persone sedute accanto può mai alzarsi contemporaneamente. In quanti modi può essere scelto il gruppo (di una o più persone) incaricato di occuparsi del dolce?
(A) 29 **(B)** 27 **(C)** 21 **(D)** 28 **(E)** 24

12. Carlo ha dimenticato il codice di sblocco del suo telefono. Tutto ciò che ricorda è che il codice è composto di 4 cifre ed il prodotto di tali cifre è 24. Quanti sono i possibili codici che rispettano queste condizioni?
(A) 60 **(B)** 48 **(C)** 56 **(D)** 64 **(E)** 40

20) Un re occupa una casella di una scacchiera illimitata in ogni direzione. Quante sono le possibili caselle in cui può trovarsi dopo aver fatto cinque mosse, sapendo che non è passato mai due volte sulla stessa casella? [Quando fa una mossa, il re si sposta in una qualsiasi delle otto caselle che hanno almeno un vertice in comune con la casella in cui si trova.]
(A) 40, **(B)** 80, **(C)** 99, **(D)** 100, **(E)** 120.